

CHIZIQSIZ TENGLAMALARNI YECHISHDA ITERATIV ALGORITMLAR: NYUTON USULI VA UNING YAQINLASHISH TEZLIGI TAHLILI

Marasulova Shaxnoza

*TDTrU, "Qurilish muhandisligi" fakulteti,
60540200-Amaliy matematika ta'lim yo'nalishi 3-kurs talabasi
marasulovashaxnoza45@gmail.com*

Annotatsiya: Mazkur maqolada chiziqsiz tenglamalarni yechishning raqamli usullari, xususan, dinamik tizimlar nazariyasiga asoslangan iterativ jarayonlar tahlil qilinadi. Tadqiqot obyekti sifatida kvadrat ildizlarni topishning qadimgi Babil algoritmi va Nyuton iteratsiyasi tanlangan. Amaliy misol sifatida $x^2 - 13 = 0$ tenglamasi yordamida $\sqrt{13}$ qiymatini hisoblash algoritmi tuzilgan va uning qo'zg'almas nuqtaga (fixed point) yaqinlashish tezligi (kvadratik yaqinlashish) matematik jihatdan asoslab berilgan.

Kalit so'zlar: Chiziqsiz tenglamalar, iterativ jarayon, Nyuton usuli, qo'zg'almas nuqta, kvadrat ildiz, yaqinlashish tezligi, dinamik tizimlar.

Abstract: This article analyzes numerical methods for solving nonlinear equations, specifically iterative processes based on dynamical systems theory. The ancient Babylonian algorithm and Newton's iteration for finding square roots are selected as the research object. As a practical example, an algorithm for calculating the value of $\sqrt{13}$ using the equation $x^2 - 13 = 0$ is developed, and its convergence rate (quadratic convergence) to a fixed point is mathematically justified.

Keywords: Nonlinear equations, iterative process, Newton's method, fixed point, square root, convergence rate, dynamical systems.

KIRISH

Fan va texnikaning ko'plab amaliy masalalari $F(x) = 0$ ko'rinishidagi chiziqsiz tenglamalarni yechishga kelib taqaladi. Agar ko'phadning (polinomning) darajasi 5 yoki undan yuqori bo'lsa, uni radikallar yordamida aniq yechish imkonsiz ekanligi algebraik jihatdan isbotlangan. Shuning uchun zamonaviy matematikada bunday tenglamalarning taqribiy ildizlarini topish uchun iterativ algoritmlardan keng foydalaniladi. Ushbu maqolaning maqsadi dinamik tizimlar nazariyasi doirasida Nyuton usulini qo'llash va uning hisoblashdagi samaradorligini amaliy misol ($\sqrt{13}$ ni hisoblash) orqali isbotlashdan iborat.

TADQIQOT METODOLOGIYASI

Tadqiqotda matematik analiz (differensial hisob), raqamli usullar va dinamik tizimlarning iteratsiya prinsiplaridan foydalanildi.

Ma'lumki, x musbat sonning kvadrat ildizini topish asrlar davomida o'rganilgan muammo bo'lib, eng oddiy usul Bobilliklarga borib taqaladi. Agar $\sqrt{S}$ ni topish kerak bo'lsa va bizda x_0 boshlang'ich taxminiy qiymat mavjud bo'lsa, haqiqiy ildiz doimo x_0 va S/x_0 oralig'ida yotadi. Ularning o'rta arifmetigini olish orqali quyidagi iterativ formulaga ega bo'lamiz:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{S}{x_n} \right)$$

Zamonaviy differensial hisobda esa, ixtiyoriy $F(x) = 0$ tenglamani yechish uchun Nyuton iteratsiyasi (urinmalar usuli) qo'llaniladi:

$$N(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

Bu jarayon ketma-ketlikni shakllantiradi: $x_1 = N(x_0)$, $x_2 = N(x_1)$ va hokazo. Odatda, agar boshlang'ich qiymat to'g'ri tanlansa, bu orbita $F(x)$ ning haqiqiy ildiziga qarab juda tez intiladi.

AMALIY TAHLIL: $\sqrt{13}$ QIYMATINI HISOBLASH

Yuqoridagi metodologiyani $\sqrt{13}$ sonini hisoblashga tatbiq etamiz. Buning uchun $F(x) = x^2 - 13 = 0$ tenglamani tuzamiz. Uning hosilasi $F'(x) = 2x$ ga teng.

Nyuton iteratsiya funksiyasini quramiz:

$$N(x) = x - \frac{x^2 - 13}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{13}{x} \right)$$

Ko'rinib turibdiki, Nyuton usulidan keltirib chiqarilgan dinamik funksiya qadimgi Bobil algoritmi bilan aynan ustma-ust tushdi.

Endi iterativ hisoblash jarayonini bajaramiz. 13 ga eng yaqin to'la kvadrat 9 (uning ildizi 3) hamda 16 (uning ildizi 4) bo'lgani uchun, boshlang'ich taxmin sifatida $x_0 = 3$ ni tanlaymiz:

$$1\text{-iteratsiya: } x_1 = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{13}{3} \right) \approx 3.6666667$$

$$2\text{-iteratsiya: } x_2 = \frac{1}{2} \left(3.6666667 + \frac{13}{3.6666667} \right) \approx 3.6060606$$

$$3\text{-iteratsiya: } x_3 = \frac{1}{2} \left(3.6060606 + \frac{13}{3.6060606} \right) \approx 3.6055513$$

Yaqinlashish tezligi tahlili: Haqiqiy qiymat $\sqrt{13} \approx 3.605551275...$ ga teng. Nyuton usulining asosiy afzalligi uning kvadratik yaqinlashish (quadratic convergence) xususiyatiga ega ekanligidadir. Bu shuni anglatadiki, har bir iteratsiya qadamida verguldan keyingi to'g'ri raqamlar soni taxminan ikki barobarga oshib boradi. Bizning amaliyotimizda ham atigi 3 ta iteratsiyadayoq 7 xonali aniqlikka

erishildi. Bu nuqta dinamik tizim uchun tortuvchi qo'zg'almas nuqta (attracting fixed point) hisoblanadi.

XULOSA

O'tkazilgan tahlillar natijasida chiziqsiz tenglamalarni yechishda dinamik tizimlarning iterativ algoritmlari naqadar samarali ekanligi isbotlandi. Kvadrat ildizni hisoblash misolida tuzilgan Nyuton iteratsiyasi qisqa qadamlar ichida yuqori aniqlikdagi yechimni taqdim etdi. Bunday algoritmlar faqatgina nazariy qiziqish emas, balki zamonaviy kompyuter dasturlari (kompilyatorlar) va muhandislik hisob-kitoblarida ma'lumotlarni qayta ishlashning tayanch mexanizmi bo'lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Devaney, R. L. (1992). A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment. CRC Press. 21-22 betlar.
2. Strogatz, S. H. (2015). Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. CRC Press.
3. Elaydi, S. (2005). An Introduction to Difference Equations (3rd ed.). Springer Science & Business Media.
4. Xudayberganov, G., & Vorisov, A. (2010). Matematik analiz. Toshkent: "Universitet" nashriyoti.