НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В РЕЛЬЕФНОМ ГАЗОПРОВОДЕ: АНАЛОГИ БЕГУЩИХ ВОЛН, НЕЛИНЕЙНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС

Мамадалиев Х.А., Ачилова Ш.О.

ТУИТ имени Мухамада ал-Хоразмий, Ташкент,

Республиканская специализированная художественная школа имени Бенькова

x.mamadaliyev@tuit.uz

shoiraoltiboyevna90@gmai.com

Аннотация. Предложена математическая модель нестационарного течения реального газа по рельефному газопроводу с переменной площадью поперечного сечения. С помощью вспомогательной функции, используемой в акустике, нелинейные уравнения Н.Е. Жуковского преобразованы к аналогам уравнений прямой и обратной бегущих волн. Разработан численный метод на основе схем против потока (явной и неявной), нелинейные граничные условия реализуются методом касательных Ньютона. Решены задачи о переходном процессе при скачкообразном росте выходного массового расхода с 250 до 300 кг/с в коротком горизонтальном и криволинейном участках. Показано, что переходный процесс протекает с образованием огибающих кривых массового расхода, давления и скорости, стремящихся к новому стационарному состоянию. Описан программный комплекс, реализующий шесть вариантов граничных условий, включая закачку и истечение газа через штуцер.

Ключевые слова: газопровод, реальный газ, бегущие волны, нелинейные граничные условия, метод Ньютона, переходные процессы, программный комплекс.

Abstract. A mathematical model of unsteady real-gas flow in an uneven pipeline of variable cross-section is proposed. Using an auxiliary function borrowed from acoustics, the nonlinear Zhukovsky equations are reduced to analogues of forward and backward travelling-wave equations. A numerical method based on upwind explicit and implicit

schemes is developed; nonlinear boundary conditions are handled by Newton's method. Transients caused by a step increase of the outlet mass flow rate from 250 to 300 kg/s are computed for short horizontal and curvilinear sections. The transient proceeds through envelope curves of mass flow, pressure and velocity that tend to the new steady state. A software package implementing six types of boundary conditions, including gas injection and release through a choke, is described.

Keywords: gas pipeline, real gas, travelling waves, nonlinear boundary conditions, Newton's method, transients, software package.

1. Введение

Нестационарные режимы работы магистральных газопроводов – пуск, изменение отбора, закачка и сброс газа, опрессовка – сопровождаются распространением волн разрежения и уплотнения, от которых зависят энергоёмкость и надёжность транспортировки. Для их расчёта развиты конечно-разностные, в том числе неявные адаптивные методы. Результаты прошлого века в основном относились к линейным граничным условиям – заданию закона изменения давления и скорости потока (или массового расхода) в концах участка. Рост вычислительных возможностей и потребности производства позволили расширить класс условий, включив нелинейные, например закачку и истечение газа через штуцер, живое сечение которого отличается от сечения трубы.

Цель работы – построить для рельефного газопровода с переменной площадью сечения аналоги уравнений бегущих волн, разработать устойчивый алгоритм их решения при различных, в том числе нелинейных, граничных условиях и изучить переходный процесс при скачкообразном изменении выходного массового расхода. Начальными условиями служат стационарные распределения, полученные в.

2. Преобразование уравнений к аналогам бегущих волн

Движение газа на элементарном участке описывается квазиодномерными уравнениями Н.Е. Жуковского:

$$-f\,\partial p/\partial x = f\rho\,\partial u/\partial t + (\lambda f/2D)\,\rho u|u| + f\rho g\,\sin\alpha + (1+\beta)\,f\rho u\,\partial u/\partial x, \qquad (1a)$$

$$-f\,\partial p/\partial t = c^2\,\partial(\rho u f)/\partial x. \qquad (1b)$$

Здесь p, ρ, u – давление, плотность и скорость газа; $f(x)$ и $D(x)$ – площадь сечения и диаметр; λ – коэффициент сопротивления; $\alpha(x)$ – уклон трассы; β – поправка Кориолиса; $c = \sqrt{zRT} = const,$ – скорость малых возмущений при уравнении состояния $p = \rho zRT$. Температура постоянна, деформацией стенки пренебрегается. Введём вспомогательную функцию, аналогичную используемой в акустике:

$$\varphi = \ln(f\rho/(f_*\rho_*)), \qquad (2)$$

где f_* и ρ_* – характерные значения площади и плотности; в невозмущённом состоянии $\varphi = 0$. Переходя к безразмерным переменным $\bar{u} = u/c$, $\bar{x} = x/l$, $\tau = ct/l$ и принимая для развитого турбулентного режима пренебрежимо малую поправку Кориолиса, приводим (1) к виду

$$\partial\bar{u}/\partial\tau + \bar{u}\,\partial\bar{u}/\partial\bar{x} + \partial\varphi/\partial\bar{x} = F, \quad \partial\varphi/\partial\tau + \bar{u}\,\partial\varphi/\partial\bar{x} + \partial\bar{u}/\partial\bar{x} = 0, \qquad (3)$$

$$F = 2\,\partial\ln(D/D_*)/\partial\bar{x} - (gl/c^2)\,\sin\alpha - (\lambda l/2D)\,\bar{u}|\bar{u}|. \qquad (4)$$

Система (3) имеет вещественные различные собственные числа $\bar{u} + 1$ и $\bar{u} - 1$, т.е. является гиперболической: существуют два направления распространения возмущений – прямое (по оси $\bar{x}$) и обратное. Диагонализация с помощью матрицы собственных векторов приводит к независимым уравнениям относительно новых искомых функций $f_1 = \bar{u} + \varphi$ и $f_2 = \bar{u} - \varphi$:

$$\partial f_1/\partial\tau + (1 + \bar{u})\,\partial f_1/\partial\bar{x} = F, \quad \partial f_2/\partial\tau - (1 - \bar{u})\,\partial f_2/\partial\bar{x} = F. \qquad (5)$$

Уравнения (5) – аналоги прямой и обратной бегущих волн; их конвективные и правые части нелинейны (квадратичный закон сопротивления, зависимость $\bar{u}$ от f_1 и f_2). Исходные переменные восстанавливаются по формулам $\bar{u} = (f_1 + f_2)/2$, $\varphi = (f_1 - f_2)/2$, а давление – из $p = p_*(f_*/f)\,e^{*\varphi*}$.

3. Начальные и граничные условия

Начальное условие может описывать пуск участка или переход из одного режима в другой. В первом варианте газ покоится: $\bar{u} = 0$, давление задаётся барометрической формулой с учётом свойств реального газа. Во втором участок работает в стационарном режиме с постоянным массовым расходом M_0, так что $u(x, 0) = M_0 c^2/(f(x)p(x, 0))$; распределение давления берётся из решения стационарной задачи. Безразмерные давление и скорость находятся делением на p_* и c, по ним вычисляются φ, f_1, f_2 в начальный момент.

Так как задача рассматривается на конечном отрезке, а система требует по одному условию на конце, на каждой границе задаётся одна величина, а вторая находится в ходе решения.

Вход: заданное давление $p(0, t)$. Тогда

$$\varphi(0, \tau) = \ln[p(0, \tau)\, f(0)/(p_* f_*)], \quad f_1(0, \tau) = f_2(0, \tau) + 2\varphi(0, \tau), \tag{6}$$

где $f_2(0, \tau)$ приходит с обратной волной из внутренней области.

Выход: заданный массовый расход $M_{*|*}(t)$, т.е. $f(l)\rho u = M_{*|*}(t)$. В безразмерном виде это условие превращается в трансцендентное уравнение

$$e^{*\varphi*(1,\ *\tau*)}\, \bar{u}(1, \tau) = \bar{Q}_{*|*}(\tau), \quad \bar{Q}_{*|*} = M_{*|*}/(\rho_* f_* c). \tag{7}$$

Значение $f_1(1, \tau)$ известно из прямой волны, $\varphi = f_1 - \bar{u}$, поэтому (7) сводится к уравнению $g(\bar{u}) = \bar{u}\, e^{*f*-\{1-\bar{u}\}} - \bar{Q}_{*|*} = 0$. При $\bar{u} < 1$ производная $g' = e^{*f*-\{1-\bar{u}\}}(1 - \bar{u})$ положительна, функция монотонна, и корень находится методом касательных Ньютона:

$$\bar{u}^{(*s*+1)} = \bar{u}^{(*s*)} - [\bar{u}^{(*s*)} - \bar{Q}_{*|*}\, e^{*\bar{u}*\wedge\{(*s*)-f_1\}}] \,/\, (1 - \bar{u}^{(*s*)}), \tag{8}$$

начиная с значения $\bar{u}$ на предыдущем временном слое; итерации продолжаются до выполнения условия $|\bar{u}^{(*s*+1)} - \bar{u}^{(*s*)}| < \varepsilon$. Затем $f_2(1, \tau) = 2\bar{u} - f_1$. Для защиты от нежелательных результатов ($\bar{u} \geq 1$ или $\bar{u} \leq 0$) предусмотрена остановка счёта, но такие случаи не наблюдались, а для выполнения условия достаточно было 3–5

приближений. При неудачном нулевом приближении в начале итераций возможны большие отклонения от заданного расхода, которые устраняются в процессе итераций.

4. Численный метод

Вводятся безразмерная сетка с постоянными шагами h по $\bar{x}$ и $\Delta\tau$ по времени и сеточные функции f_1, f_2, $\bar{u}$, φ. С учётом направлений распространения возмущений уравнения аппроксимировались в явной и неявной формах, причём конвективные члены – по схеме против потока. Явная схема для внутренних узлов j имеет вид

$$f_{1,*j*}^{\;*n*+1} = f_{1,*j*}^{\;*n*} - (1 + \bar{u}_{*j*}^{\;*n*})(\Delta\tau/h)(f_{1,*j*}^{\;*n*} - f_{1,*j*-1}^{\;*n*}) + \Delta\tau\, F_{*j*}^{\;*n*}, \qquad (9a)$$

$$f_{2,*j*}^{\;*n*+1} = f_{2,*j*}^{\;*n*} + (1 - \bar{u}_{*j*}^{\;*n*})(\Delta\tau/h)(f_{2,*j*+1}^{\;*n*} - f_{2,*j*}^{\;*n*}) + \Delta\tau\, F_{*j*}^{\;*n*}. \qquad (9b)$$

Расчёт ведётся маршевым методом по времени при выполнении условия устойчивости типа Куранта $(1 + |\bar{u}|)\Delta\tau/h \le 1$. В неявной схеме использовалось среднеарифметическое значение силы сопротивления в узлах j и $j \mp 1$, что позволяет найти значения на новом слое явными формулами. Формально обе схемы имеют первый порядок точности, однако при больших длинах и значительных уклонах трассы неявная форма показала себя лучше.

Предложенный метод представляет собой усовершенствование метода характеристик, учитывающее нелинейность переносимых волн и реализуемых граничных условий. По методу составлена программа на Delphi 7, состоящая из вводной части, части решения уравнений и части расчёта факторов, определяющих градиент давления; она отлаживалась на тестовых задачах.

Следует отметить особенность постановки. Для системы на каждом конце участка корректно задавать лишь одно условие – то, которое определяет входящую в область волну; задание обеих величин (p и M) на одном конце приводило бы к переопределению краевых условий, что не согласуется с каноном математики. Поэтому на каждой границе заданная величина связывается с приходящим из области инвариантом (f_2 на входе, f_1 на выходе), а вторая составляющая вычисляется

из условия, как показано выше. Такой способ автоматически согласует граничные условия с направлением распространения возмущений и не требует дополнительной экстраполяции на границе.

5. Результаты расчётов

Расчёты проводились для коротких (2 км), средних (50 км) и длинных (100 км) участков; ниже приведены результаты для коротких трубопроводов. Скорость малых возмущений c = 378,21 м/с, входное давление 5,6 МПа, начальный массовый расход 250 кг/с; в момент $\tau = 0$ выходной расход скачком возрастает до 300 кг/с.

Горизонтальный участок (рис. 1). Образовавшаяся на выходе волна разрежения перемещается против потока: кривые массового расхода ограничены сверху новой огибающей, проходящей через точки с новым расходом, а снизу – кривой исходного расхода. По достижении начала участка волна опрокидывается и порождает волны уплотнения; возникающие огибающие поочерёдно ограничивают кривые расхода, и со временем они стремятся к прямой M = 300 кг/с. Аналогичные огибающие образуются и в кривых давления: волна разрежения распространяется слева направо, и давление стремится к стационарному состоянию с расходом 300 кг/с, при котором путевая потеря давления больше начальной. Скорость потока возрастает по длине участка из-за потерь давления на преодоление сопротивления; в процессе установления она увеличивается примерно на 20 % (с 8,1 до 9,8–9,9 м/с), скачки в кривых сглаживаются.

Масштаб времени процесса задаётся скоростью звука: волне разрежения, вышедшей с конца участка, требуется около $l/c \approx 5{,}3$ с ($l = 2$ км, $c = 378{,}21$ м/с), чтобы дойти до входа, что соответствует безразмерному времени $\tau \approx 1$. Скорость газа (около 8–10 м/с) на два порядка меньше скорости звука, поэтому фронты волн практически не сносятся потоком и двигаются со скоростями, близкими к $\pm c$; нелинейность проявляется в искажении формы фронтов и в образовании «ступенчатых» огибающих, а не в изменении скорости их распространения.

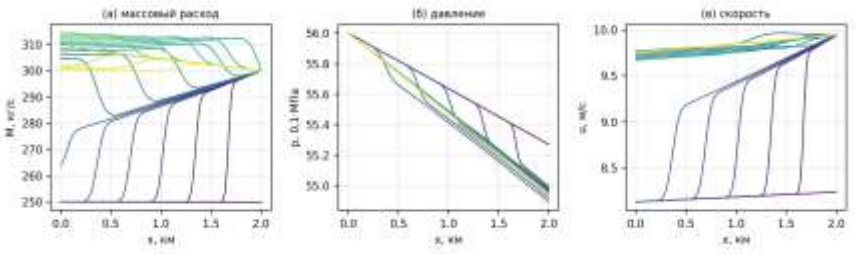

Рис. 1. Горизонтальный газопровод длиной 2 км, скачок выходного расхода 250→300 кг/с: (а) массовый расход, (б) давление, (в) скорость газа в различные моменты безразмерного времени (цвет – от начальных моментов к конечным)

Криволинейная трасса (рис. 2). Трасса от 0 в сечении $x = 0$ синусоидально снижается до 250 м в сечении 400 м, далее горизонтальна на длине 200 м, затем синусоидально опускается до наибольшей глубины 500 м в сечении 1200 м и поднимается до 0. Верхняя кривая давления отвечает начальному распределению, к ней снизу примыкают кривые со скачком разрежения, нижняя – установившемуся решению при расходе 300 кг/с. С ростом расхода потеря давления увеличивается, но здесь определяющим фактором служит изменение нивелирной высоты трассы: градиент давления фактически задаётся гравитационной составляющей, тогда как изменения плотности, локальной и конвективной составляющих силы инерции и силы сопротивления в масштабе рисунка малы. Кривая скорости в процессе установления приобретает аналогичный вид и примерно на 20 % выше исходной, а кривые расхода повторяют картину горизонтального участка.

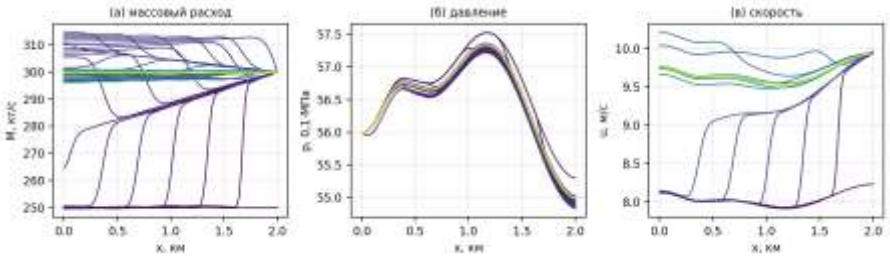

Рис. 2. Криволинейная трасса, скачок выходного расхода 250→300 кг/с: (а) массовый расход, (б) давление, (в) скорость газа

Важно, что при скачке расхода на выходе давление на входе остаётся заданным, поэтому весь переходный процесс определяется распространением возмущения из

конца участка. Из-за постоянства $p(0, t)$ условие на входе не вносит в решение посторонних возмущений, а отражённая от входа волна уплотнения лишь корректирует поле течения; в результате решение монотонно приближается к стационарному режиму с расходом 300 кг/с, а установившееся давление в любом сечении лежит ниже начального, т.к. путевая потеря давления при большем расходе возрастает.

6. Программный комплекс и граничные условия

На основе описанного метода создан программный продукт, блок-схема которого приведена на рис. 3. Части 1 и 3 блок-схемы отвечают заданию давления на входе по, части 2 и 4 – заданию массового расхода на выходе по; работа частей переключается в зависимости от выбранной комбинации граничных условий. Начальные условия формируются по, рассматриваются трассы с постоянным уклоном, V-образные и криволинейные. Пробные расчёты для вставки изменённого диаметра и локального синусоидального сужения (расширения) показали достоверное отражение физической картины; сравнение с барометрической формулой при гладком изменении диаметра дало хорошее согласие. Даже при скачкообразном изменении расхода программа обеспечивает монотонное приближение к новому расходу.

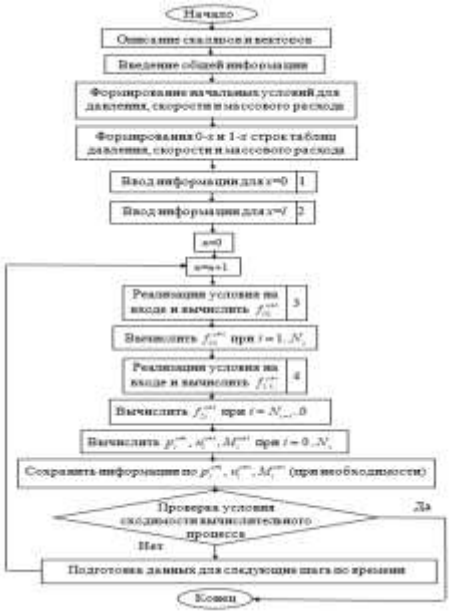

Рис. 3. Укрупнённая схема программного продукта (части 1–4 работают как переключатель граничных условий)

Возможности продукта расширены вариантами задания входного расхода и выходного давления, а также этапами опрессовки участка. При опрессовке один конец участка заглушается, через другой закачивают газ (воздух) до давления, превышающего ожидаемое рабочее, например, на 25 %; затем участок выдерживают с закрытыми концами, и если среднее давление остаётся постоянным, участок считается пригодным к эксплуатации, после чего газ выпускают. Реализованные варианты граничных условий приведены в табл. 1.

Таблица 1. Варианты граничных условий программного комплекса

№	Условие	Способ реализации
1	На входе задан массовый расход	Трансцендентное уравнение, метод Ньютона
2	Закачка газа через входной штуцер заданной площади под давлением	Метод Ньютона

№	Условие	Способ реализации
3	Закачка газа через выходной штуцер заданной площади под давлением	Метод Ньютона
4	Истечение газа через входной штуцер при атмосферном давлении	Метод Ньютона
5	Истечение газа через выходной штуцер при атмосферном давлении	Метод Ньютона
6	Задано выходное давление	Явное выражение, итерации не нужны

Число приближений по рекуррентным формулам для нелинейных условий не превышало шести при заданной точности, что подтверждает удачность выбора метода Ньютона. Время счёта ограничивалось достижением заданной близости результатов на соседних слоях, дополнительно требовалось выполнение условия по массовому расходу или задавалось максимальное число шагов. Наиболее трудоёмким оказалось выполнение условия по расходу: после достижения заданной точности по скорости, вспомогательной функции и расходу дальнейшего улучшения результатов не происходит. Комплекс позволяет исследовать закачку и истечение газа через штуцеры, живые сечения которых отличаются от сечения газопровода, а также одновременную двустороннюю закачку и выпуск, при которых образование и распространение волн уплотнения и разрежения выражены наиболее ярко.

Таким образом, предложенный подход позволяет единообразно решать задачи с различными сочетаниями граничных условий: меняется только блок реализации условия на соответствующем конце участка (табл. 1), тогда как ядро – схемы для внутренних узлов – остаётся прежним. Это упрощает расширение комплекса на новые постановки, например задачи с ресивером, и делает его удобным

инструментом для оценки надёжности и энергоёмкости режимов транспортировки газа.

7. Заключение

1. Нелинейные нестационарные уравнения движения реального газа в рельефном газопроводе с переменным сечением приведены с помощью вспомогательной функции к аналогам прямой и обратной бегущих волн.

2. Разработан метод решения на основе схем против потока (явной и неявной), нелинейные граничные условия реализуются методом касательных Ньютона; достаточно 3–5 приближений (не более шести для всех рассмотренных нелинейных условий).

3. В коротких газопроводах (2 км) при скачке выходного расхода с 250 до 300 кг/с переходный процесс протекает с образованием огибающих кривых массового расхода, давления и скорости, стремящихся к предельному режиму; скорость возрастает примерно на 20 %. На криволинейной трассе градиент давления определяется преимущественно гравитационной составляющей.

4. Программный комплекс реализует шесть вариантов граничных условий, включая закачку и истечение газа через штуцер, и применим к задачам опрессовки участков.

Литература

1. Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н. Математическое моделирование магистральных трубопроводных систем: дополнительные главы. – М.: МАКС Пресс, 2009. – 356 с.

2. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – 296 с.

3. Wang P., Yu B., Han D., Li J., Sun D., Xiang Y., Wang L. Adaptive implicit finite difference method for natural gas pipeline transient flow // Oil & Gas Science and

Technology – Rev. IFP Energies nouvelles. – 2018. – 73, 21. – https://doi.org/10.2516/ogst/2018013

4. Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А., Равшанов Ш.А., Хасанов М.А. Постперевальный режим при стационарном функционировании магистральных газопроводов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2023. – № 2 (47). – С. 54–63.

5. Хужаев И.К., Мамадалиев Х.А. Расчёт процесса распространения волны уплотнения малосжимаемой жидкости в наклонном трубопроводе // Агентство по интеллектуальной собственности РУз. Свидетельство № DGU 02942. 30.12.2014.

6. Коротаев Ю.П., Ширковский А.И. Добыча, транспорт и подземное хранение газа. – М.: Недра, 1997. – 487 с.