KELI DARAXTIDA TASHQI MAYDONLI ISING MODELI VA UNING ASOSIY XOSSALARI

Turdaliyeva Dildora Roziqjon qizi

Annotatsiya. Ushbu maqolada Keli daraxtida tashqi magnit maydoni ta’siridagi Ising modelining matematik asoslari va asosiy xossalari o‘rganiladi. Modelda spinlar o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir, tashqi maydonning magnitlanishga ta’siri, Gibbs o‘lchovlari va termodinamik muvozanat masalalari tahlil qilinadi. Shuningdek, rekurrent munosabatlar yordamida modelning muvozanat holatlarini o‘rganish imkoniyatlari yoritiladi.

Kalit so‘zlar: Keli daraxti, Ising modeli, tashqi magnit maydoni, spin, Gibbs o‘lchovi, statistik fizika, magnitlanish, fazaviy o‘tish, rekurrent munosabatlar, termodinamik muvozanat.

Statistik fizikaning muhim yo‘nalishlaridan biri ko‘p zarrachali tizimlarning makroskopik xususiyatlarini ularni tashkil etuvchi zarrachalar o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir orqali o‘rganishdan iborat. Magnit materiallarning xususiyatlarini tadqiq etishda Ising modeli keng qo‘llaniladigan matematik modellardan biri hisoblanadi. Ushbu model yordamida magnit tartiblanish, tashqi maydon ta’siri, spinlarning o‘zaro bog‘liqligi va fazaviy o‘tishlar kabi hodisalarni tahlil qilish mumkin. Izing modelida tizimning har bir tuguniga spin o‘zgaruvchisi mos qo‘yiladi. Oddiy ikki holatli modelda spin +1 yoki −1 qiymatlarni qabul qiladi. Qo‘shni spinlar o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir tizimning energiyasini belgilaydi. Tashqi magnit maydoni mavjud bo‘lganda esa spinlarning muayyan yo‘nalishda joylashish ehtimoli o‘zgaradi. Tizimning Gamiltoniani quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle} \sigma(x)\sigma(y) - h \sum_{x} \sigma(x) \qquad (1)$$

bu yerda $\langle x, y \rangle$ — qo‘shni tugunlar jufti, $\sigma(x) \in \{-1, +1\}$ — x tugundagi spin, J — spinlar o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir koeffitsiyenti, h — tashqi magnit maydoni. Keli daraxti

ushbu modelni o‘rganish uchun muhim matematik tuzilmalardan biridir. U sikllarga ega bo‘lmagan graf bo‘lib, tugunlar o‘zaro qirralar orqali bog‘langan. Daraxtning geometrik xususiyatlari model uchun rekurrent munosabatlarni tuzish va tizimning termodinamik holatlarini tahlil qilish imkonini beradi [1].

Keli daraxtining tuzilishi Изинг modelini rekurrent usulda tahlil qilishga imkon beradi. Hisoblashlar daraxtning tashqi qatlamlaridan boshlanib, ichki qatlamlar tomon davom ettirilishi mumkin. Har bir tugun uchun spinning ikki holatiga mos statistik og‘irliklar aniqlanadi. Keyingi bosqichda ushbu og‘irliklar yuqoriroq qatlamdagi tugunlarning holatini hisoblash uchun ishlatiladi. k tartibli Keli daraxtida har bir tugun $k+1$ ta qo‘shni tugunga ega. Ildiz spini σ bo‘lgan n qatlamli shoxning statistik og‘irligi $Z_n(\sigma)$ uchun quyidagi rekurrent munosabat o‘rinli:

$$Z_n(\sigma) = e^{\beta h\sigma}\left[\sum_{s=\pm 1} e^{\beta J\sigma s} Z_{n-1}(s)\right]^k \quad (2)$$

bu yerda $\beta = \frac{1}{k_B T}$ — teskari harorat, k_B — Boltsman doimiysi, T — absolyut harorat. Ikki holatga mos og‘irliklar nisbati $z_n = \frac{Z_n(+1)}{Z_n(-1)}$ uchun munosabat quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$z_n = e^{2\beta h}\left(\frac{\theta z_{n-1}+1}{z_{n-1}+\theta}\right)^k \quad (3)$$

bu yerda $\theta = e^{2\beta J}$. Rekurrent munosabatlar yordamida tashqi magnit maydoni, harorat va spinlar o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirning tizim holatiga ta’sirini o‘rganish mumkin. Bunday yondashuv modelning muvozanat holatlarini aniqlashda va turli parametrlar o‘zgarganda tizim xususiyatlari qanday o‘zgarishini tushuntirishda muhim ahamiyatga ega. Shu bilan birga, Keli daraxtining chegaraviy tugunlari ham alohida e’tiborga loyiq. Chekli daraxtlarda chegaraviy tugunlar soni umumiy tugunlar soniga nisbatan sezilarli bo‘lishi mumkin. Shu sababli chegaraviy shartlar tizimning umumiy holatiga ta’sir

ko‘rsatadi. Modelni tahlil qilishda chegaradagi spinlarning erkin yoki oldindan belgilangan holatda ekanini hisobga olish zarur [2].

Tashqi magnit maydoni Ising modelining muhim parametrlaridan biri bo‘lib, spinlarning yo‘nalishi va tizimning magnitlanishiga ta’sir qiladi. Tashqi maydon mavjud bo‘lganda +1 va −1 spin holatlarining ehtimollari, odatda, bir-biridan farq qiladi. Musbat tashqi maydon musbat spinlarning energetik jihatdan qulay bo‘lishiga yordam beradi. Natijada tizimning o‘rtacha magnitlanishi musbat qiymat tomon siljishi mumkin. Manfiy tashqi maydon esa aksincha, manfiy spinlarning ustun bo‘lishiga olib kelishi mumkin. Magnitlanish spinlarning umumiy yo‘nalishini tavsiflovchi asosiy fizik kattaliklardan biridir. Tashqi maydonning ta’siri harorat bilan chambarchas bog‘liq. Past haroratlarda spinlar o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir tizimning tartiblangan holatlarini yuzaga keltirishi mumkin. Harorat ortishi bilan termik fluktuatsiyalar kuchayadi va spinlarning tartiblanish darajasi o‘zgaradi. Tashqi maydon esa spinlarning ma’lum yo‘nalishda joylashish ehtimoliga ta’sir qilishda davom etadi. Maydon nolga teng bo‘lgan holatda ayrim parametrlar sharoitida simmetriyaning buzilishi va spontan magnitlanish kabi hodisalar yuzaga kelishi mumkin. Tashqi maydon noldan farq qilganda esa magnitlanishning yo‘nalishiga tashqi ta’sir ham sabab bo‘ladi. Shuning uchun fazaviy o‘tishlarni tahlil qilishda maydonning qiymati, harorat va chegaraviy shartlar birgalikda o‘rganilishi kerak [3].

Keli daraxtida tashqi maydonli Ising modelining termodinamik xususiyatlari o‘zaro ta’sir koeffitsiyenti, harorat, tashqi maydon va chegaraviy shartlarga bog‘liq. Ushbu xususiyatlarni o‘rganishda statistik yig‘indi, erkin energiya, magnitlanish va korrelatsiya funksiyalaridan foydalaniladi. Statistik yig‘indi tizimning barcha mumkin bo‘lgan spin konfiguratsiyalarini hisobga oladi:

$$Z = \sum_{\sigma} e^{-\beta H(\sigma)} \quad (4)$$

bu yerda yig‘indi barcha σ konfiguratsiyalar bo‘yicha olinadi. Gibbs taqsimotiga ko‘ra σ konfiguratsiyaning ehtimoli quyidagiga teng:

$$P(\sigma) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\sigma)} \quad (5)$$

Erkin energiya esa tizimning muvozanat holatini tavsiflaydi:

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z \quad (6)$$

Magnitlanish spinlarning o‘rtacha yo‘nalishini ko‘rsatsa, korrelatsiya funksiyasi turli tugunlardagi spinlar o‘rtasidagi statistik bog‘liqlikni ifodalaydi:

$$m(x) = \langle \sigma(x) \rangle = \sum_{\sigma} \sigma(x) P(\sigma) \quad (7)$$

$$C(x, y) = \langle \sigma(x)\sigma(y) \rangle - \langle \sigma(x) \rangle \langle \sigma(y) \rangle \quad (8)$$

bu yerda $\langle \cdot \rangle$ — Gibbs taqsimoti bo‘yicha o‘rtachalash belgisi. Harorat past bo‘lganda energiya jihatidan qulay konfiguratsiyalarning ehtimoli ortadi [4].

Yuqori haroratlarda esa termik fluktuatsiyalar kuchayib, spinlarning tartiblanishiga ta’sir ko‘rsatadi. Tashqi magnit maydoni spinlarning muayyan yo‘nalishda joylashish ehtimolini o‘zgartiradi. Modelning yana bir muhim xususiyati Gibbs o‘lchovlarining mavjudligi va soni bilan bog‘liq. Muayyan sharoitlarda tizimning muvozanat holatini ifodalovchi yagona Gibbs o‘lchovi mavjud bo‘lishi mumkin. Boshqa parametrlar sharoitida esa bir nechta Gibbs o‘lchovlari yuzaga kelishi ehtimoli mavjud. Daraxtda translyatsion-invariant Gibbs o‘lchovlarining soni (3) rekurrent munosabatning qo‘zg‘almas nuqtalari, ya’ni quyidagi tenglamaning yechimlari soni bilan aniqlanadi:

$$z = e^{2\beta h}\left(\frac{\theta z + 1}{z + \theta}\right)^{k} \quad (9)$$

bu yerda z — z_n ketma-ketlikning qo‘zg‘almas nuqtasi. Bu holat tizimning turli muvozanat holatlari va fazaviy xususiyatlarini o‘rganishda muhim nazariy ahamiyatga ega. Keli daraxtida tashqi maydonli Ising modelini tahlil qilishda chegaraviy ta’sirni hisobga olish ayniqsa muhimdir. Chunki chekli daraxtdagi chegaraviy spinlarning holati markaziy tugunlar va butun tizimning statistik xususiyatlariga ta’sir ko‘rsatishi mumkin. Shu sababli natijalarni umumlashtirishda daraxtning o‘lchami va tanlangan chegaraviy shartlar alohida ko‘rib chiqiladi [5].

Xulosa

Keli daraxtida tashqi maydonli Ising modeli spinlar o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirni va tashqi magnit maydonining tizimga ta’sirini o‘rganish imkonini beruvchi muhim nazariy model hisoblanadi. Uning matematik asosini Gamiltonian, Gibbs taqsimoti va statistik yig‘indi tashkil etadi. Ushbu tushunchalar orqali magnitlanish, erkin energiya, korrelatsiya va muvozanat holatlarini tahlil qilish mumkin. Keli daraxtining sikllarsiz tuzilishi rekurrent munosabatlardan foydalanishga imkon beradi. Biroq daraxtning chegaraviy tugunlari tizimning xususiyatlariga sezilarli ta’sir ko‘rsatishi mumkin. Tashqi magnit maydoni spinlarning yo‘nalishini belgilashga ta’sir etsa, harorat tizimning tartiblanish darajasi va termik fluktuatsiyalarini o‘zgartiradi. Umuman olganda, Keli daraxtida tashqi maydonli Ising modelini o‘rganish statistik fizikaning nazariy masalalarini chuqurroq tushunishga, muvozanat holatlarini tahlil qilishga va spin tizimlarining fazaviy xususiyatlarini aniqlashga xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Friedli S., Velenik Y. Statistical Mechanics of Lattice Systems: A Concrete Mathematical Introduction. Cambridge University Press, 2017.

2. Auerbach A. Interacting Electrons and Quantum Magnetism. Springer, 2018

3. Le Bellac M. Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics. Cambridge University Press, 2019.

4. Georgii H.-O. Gibbs Measures and Phase Transitions. 2-nashr. De Gruyter, 2011.

5. Baxter R. J. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Academic Press, 1982.